

# 非均匀周期采样多率系统的一种辨识方法

丁 锋<sup>1,2</sup>, 陈通文<sup>2</sup>, 萧德云<sup>1</sup>

(1. 清华大学自动化系, 北京 100084; 2. 加拿大艾尔伯特塔大学电气与计算机工程系, 埃德蒙顿 T6G 2V4)

**摘 要:** 本文利用提升技术, 推导了非均匀采样多率系统的提升状态空间模型. 对于状态可测量的多率系统, 利用最小二乘原理, 给出了模型参数矩阵辨识方法; 对于状态不可测的未知参数多率系统, 利用递阶辨识原理, 在考虑提升模型的因果约束下, 将提升系统分解为子系统进行辨识, 形成了状态空间模型递阶辨识方法. 仿真例子表明, 本文提出的递阶辨识方法是有效的.

**关键词:** 多率系统; 状态空间模型; 递阶辨识; 参数估计

**中图分类号:** TP273 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2004) 09-1414-07

## Identification of Non-Uniformly Periodically Sampled Multirate Systems

DING Feng<sup>1,2</sup>, CHEN Tong-wen<sup>2</sup>, XIAO De-yun<sup>1</sup>

(1. Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China;

2. Department of Electrical and Computer Engineering, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada T6G 2V4)

**Abstract:** For non-uniformly periodically sampled multirate systems, we derive the corresponding lifted state-space models by using the lifting technique. Furthermore, for multirate systems whose states are measurable, an identification method to estimate the lifted system parameter matrices is given by using the least squares principle; for multirate systems whose states are unmeasurable, the lifted multirate systems are decomposed into some subsystems according to the hierarchical identification principle, and the hierarchical state-space model identification methods are developed, which take causality constraints into consideration. The simulation results indicate that the proposed algorithms are effective.

**Key words:** multirate systems; state-space models; hierarchical identification; parameter estimation

### 1 引言

设图1中  $S_c$  为连续过程,  $H_{T_1}$  代表周期为  $T_1$  的零阶保持器,  $S_{T_2}$  代表周期为  $T_2$  的采样器. 当控制输入刷新周期  $T_1$  和输出采样周期  $T_2$  相等时, 即  $T_1 = T_2 = h$  时, 则得到传统采样数据系统, 即单率系统, 如图1所示, 其中  $u(t)$  是控制输入,  $y(t)$  是系统输出,  $v(t)$  是一个零均值不相关随机过程. 单率系统是双率系统的一个特例. 方崇智和萧德云的《过程辨识》是讨论单率系统辨识问题的<sup>[1]</sup>.

存在两个或两个以上操作频率的系统称为多率系统. 例如图1中, 当控制输入刷新周期

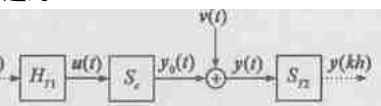


图1 传统采样数据系统 ( $T_1 = T_2 = h$ )

$T_1$  和输出采样周期  $T_2$  不相同, 就得到了一个双率系统 (Dual-Rate System)<sup>[2]</sup>; 对于多变量系统, 当输入输出通道采样频率 (采样周期) 不相同, 就得到一个多率系统 (Multirate System). 双率系统是一类最简单的多率系统. 多率系统广泛存

在于过程工业中<sup>[3,4]</sup>. 在化工过程控制中, 化工产品的质量化验数据 (如汽油辛烷值的测量<sup>[5]</sup>) 需经过实验室分析得到, 通常需要几分钟, 甚至几十分钟, 而控制信号的刷新频率却相对较快, 可能只有秒数量级. 多率系统是一个极其活跃的研究领域, 其研究活动涉及多率系统鲁棒控制<sup>[6-10]</sup>, 多率系统的预测控制<sup>[11]</sup>, 多率系统的推理控制<sup>[5,12]</sup>等等.

然而, 我们注意到, 以上文献中大多数控制算法都是假设多率系统的参数是已知的, 即假设多率系统对应的连续系统参数是已知的, 或多率系统对应的单率模型的参数是已知的, 或多率系统的状态已知的. 虽然在已出版的文献中, 涉及到双率系统频域模型的辨识, 例如文<sup>[13, 14]</sup>使用投影算法和最小二乘法来估计双率系统的参数. 但是, 不幸的是, 他们的方法只适用于确定性系统. 文<sup>[15]</sup>利用系统状态和输入输出数据来估计双率系统的参数. 然而, 实际中要事先知道系统的参数或状态几乎是不可能. 文<sup>[16, 17]</sup>利用多项式变换技术来研究双率系统的辨识问题. 就我们所知, 非均匀多率系统状态空间模型的辨识, 以及多率随机系统辨识方法的研究几乎还是空白. 本文的目的就是: 利用丁锋等提出的递阶辨识原理<sup>[18-20]</sup>,

收稿日期: 2003-09-01; 修回日期: 2004-04-06

基金项目: 国家自然科学基金 (No. 60074029)

基于多率输入输出数据,研制状态不可测非均匀采样多率随机系统的辨识问题.

### 2 问题构成

对于传统的离散时间系统,保持器和采样器的操作频率单一且相同,其周期为  $h$ . 但是,对于非均匀周期采样系统(如图 2 所示),非均匀零阶保持器

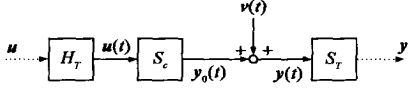


图 2 非均匀多率采样数据系统

$H_T$  和非均匀采样器  $S_T$  的操作频率不唯一,其刷新和采样间隔依次为  $\{1, 2, \dots, p\}$ , 如图 3 和图 4 所示,即刷新和采样时间点为  $t = kT + t_i (k=0, 1, 2, \dots), i=1, 2, \dots, p$ , 其中  $t_i = 1 + 2 + \dots + i$  (不妨设  $t_0=0$ ),  $T = 1 + 2 + \dots + p = t_p$  称为框架周期. 非均匀保持器  $H_T$  在第  $k$  个周期  $[kT, (k+1)T]$  上,控制输入  $u$  在点  $t = kT + t_i (i=1, 2, \dots, p)$  非均匀刷新  $p$  次,也就是说,非均匀零阶保持器  $H_T$  的特性可以表示为

$$u(t) = \begin{cases} u(kT), & kT \leq t < kT + t_1, \\ u(kT + t_1), & kT + t_1 \leq t < kT + t_2, \\ \dots & \dots \\ u(kT + t_{p-1}), & kT + t_{p-1} \leq t < (k+1)T. \end{cases}$$

类似地,输出在点  $t = kT + t_i (i=1, 2, \dots, p)$  上非均匀采样  $p$  次. 也就是说,刷新和采样以  $\{1, 2, \dots, p\}$  重新地周期进行. 这样的刷新和采样方案可以用图 3 和图 4 表示.

根据这种定义,可以得到两种非均匀周期采样系统:(1)控制输入非均匀周期刷新、输出周期采样,如图 3 所示,和(2)控制输入非均匀周期刷新、输出非均匀周期采样,如图 4 所示. 在图 4 中,我们考虑的是一个周期  $T$  内保持点和采样点数目相同,且间隔相同的情况. 值得指出的是,本文的方法可以推广到保持点和采样点数目不相同的情况.

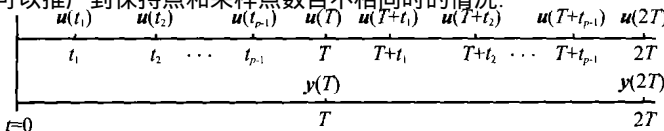


图 3 非均匀周期刷新和周期采样方案 ( $\tau_i = t_i - t_{i-1}$ )

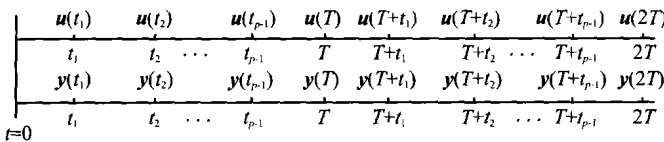


图 4 非均匀周期刷新和采样方案 ( $\tau_i = t_i - t_{i-1}$ )

由于非均匀周期刷新和采样方案,从  $u$  到  $y$  是一个时变系统. 然而,利用所谓的提升技术<sup>[5,11,15]</sup>,把每  $p$  个输入和  $p$  个输出放到一块,构成一个提升输入向量  $\underline{u}$  和提升输出向量  $\underline{y}$  (其定义见后),我们就得到周期  $T$  上的一个线性时不变多变量系统.

本文的目标:对于前面所描述的非均匀周期刷新和采样多率系统,推导其状态空间模型,并基于多率输入输出数据  $\{u(kT + t_i), y(kT + t_i)\}, k=0, 1, 2, \dots, (i=0, 1, 2, \dots, p-1)$ ,

应用递阶辨识原理,考虑提升模型的因果约束,研制非均匀采样多率系统状态空间模型的阶辨识方法.

### 3 提升系统状态空间模型

本节推导非均匀周期采样多率系统的状态空间模型:(1)控制输入非均匀周期刷新、输出周期采样(图 3),和(2)控制输入非均匀周期刷新、输出非均匀周期采样(图 4).

整篇文章,假设图 2 中  $S_c$  是一个线性时不变连续时间过程,且具有下列状态空间模型

$$S_c: \begin{cases} \dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t) \\ y(t) = C x(t) + D u(t) + v(t) \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  是状态向量,  $u(t) \in \mathbb{R}^r$  是控制输入,  $y(t) \in \mathbb{R}^r$  是系统输出向量,  $v(t) \in \mathbb{R}^r$  是一个零均值随机白噪声向量,  $A_c, B_c, C, D$  均为适当维数的矩阵.

#### 3.1 非均匀周期刷新和周期采样方案

令  $t_0=0, t_1 = t_0 + 1 = 1, t_2 = t_1 + 2, \dots, t_p = t_{p-1} + p = T = 1 + 2 + \dots + p$ , 假设  $u(t)$  在区间  $[kT + t_i, kT + t_{i+1}]$ ,  $i=0, 1, 2, \dots, p-1$  上保持常数,即  $u(t) = u(kT + t_i), kT + t_i \leq t < kT + t_{i+1}, i=0, 1, 2, \dots, p-1$ , 即采用非均匀零阶保持器. 对于图 3,可量测的输入输出数据为  $u(kT + t_i) (i=0, 1, 2, \dots, p-1)$  和  $y(kT)$ . 从式(1),我们有

$$\begin{aligned} x((k+1)T) &= e^{A_c T} x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A_c((k+1)T-\tau)} B_c u(\tau) d\tau \\ &= e^{A_c T} x(kT) + \sum_{i=1}^p \int_{kT+t_{i-1}}^{kT+t_i} e^{A_c((k+1)T-\tau)} B_c u(kT+t_{i-1}) d\tau \\ &= e^{A_c T} x(kT) + \sum_{i=1}^p \int_{T-t_i}^{T-t_{i-1}} e^{A_c t} dt B_c u(kT+t_{i-1}) \\ &= e^{A_c T} x(kT) + \sum_{i=1}^p \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{A_c(T-t)} dt B_c u(kT+t_{i-1}) \\ &= e^{A_c T} x(kT) + \sum_{i=1}^p \int_0^{t_i} e^{A_c(T-t)} dt B_c u(kT+t_{i-1}) \\ &=: A_T x(kT) + [B_1, B_2, \dots, B_p] \underline{u}(kT) \\ &=: A_T x(kT) + B_T \underline{u}(kT) \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned} A_T &= e^{A_c T} \mathbf{R}^{n \times n}, A_{t_i} = e^{A_c t_i} \mathbf{R}^{n \times n} \\ B_i &= \int_0^{t_i} e^{A_c t} dt B_c \mathbf{R}^{n \times r} \\ B_i &= e^{A_c(T-t_i)} \int_0^{t_i} e^{A_c t} dt B_c = A_T A_{t_i}^{-1} B_i \mathbf{R}^{n \times r} \\ B_T &= [B_1, B_2, \dots, B_p] \mathbf{R}^{n \times (pr)} \\ \underline{u}(kT) &= \begin{bmatrix} u(kT) \\ u(kT + t_1) \\ \dots \\ u(kT + t_{p-1}) \end{bmatrix} =: \underline{u}(k) \mathbf{R}^{pr} \text{ (非均匀提升输入向量)} \end{aligned}$$

入向量)

提升系统可以表示为

$$\begin{bmatrix} x((k+1)T) \\ y(kT) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_T & B_1 & B_2 & \dots & B_p \\ C & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(kT) \\ \underline{u}(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ v(kT) \end{bmatrix}$$

或

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_T & B_T \\ C_T & D_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ v(k) \end{bmatrix}$$

式中,  $C_T = C \quad \mathbf{R}^{m \times n}$ ,  $D_T = [D, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}] \quad \mathbf{R}^{m \times (pr)}$ .

### 3.2 非均匀周期刷新和非均匀周期采样方案

对于图 4 的非均匀周期刷新和采样方案, 设量测多率数据为  $u(kT + t_i)$  和  $y(kT + t_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, p - 1$  采用非均匀零阶保持器, 有

$$x(kT + t_i) = e^{A_i t_i} x(kT) + \int_{kT}^{kT+t_i} e^{A_i(kT+t_i-r)} B u(r) dr$$

$$= A_i x(kT) + [B_1, B_2, \dots, B_i] \begin{bmatrix} u(kT) \\ u(kT + t_1) \\ \dots \\ u(kT + t_{i-1}) \end{bmatrix}$$

输出方程为

$$y(kT + t_i) = Cx(kT + t_i) + Du(kT + t_i) + v(kT + t_i)$$

$$= CA_i x(kT) + [CB_1, CB_2, \dots, CB_i] \begin{bmatrix} u(kT) \\ u(kT + t_1) \\ \dots \\ u(kT + t_{i-1}) \end{bmatrix} + Du(kT + t_i) + v(kT + t_i)$$

$$= : C_i x(kT) + [D_1, D_2, \dots, D_i, D] \begin{bmatrix} u(kT) \\ u(kT + t_1) \\ \dots \\ u(kT + t_{i-1}) \\ u(kT + t_i) \end{bmatrix} + v(kT + t_i)$$

式中,  $C_i = CA_i$ ,  $D_i = CB_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p - 1$ . 于是, 提升系统可以表达为

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_T & B_T \\ C_T & D_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ v(k) \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中

$$x(k) := \begin{bmatrix} x(kT) \\ x(kT + t_1) \\ \dots \\ x(kT + t_{p-1}) \end{bmatrix}, B_T = [B_1, B_2, \dots, B_p] \quad \mathbf{R}^{n \times (pr)}$$

$$C_T = \begin{bmatrix} C \\ C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_{p-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}^{(pm) \times n}, D_T = \begin{bmatrix} D & \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ D_1 & D & & & \dots \\ D_1 & D_2 & \ddots & & \dots \\ \dots & \ddots & \ddots & D & \mathbf{0} \\ D_1 & D_2 & \dots & D_{p-1} & D \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}^{(pm) \times (pr)}$$

$$y(k) := \begin{bmatrix} y(kT) \\ y(kT + t_1) \\ y(kT + t_2) \\ \dots \\ y(kT + t_{p-1}) \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}^{(pm)} \text{ (非均匀提升输出向量)}$$

$$v(k) := \begin{bmatrix} v(kT) \\ v(kT + t_1) \\ v(kT + t_2) \\ \dots \\ v(kT + t_{p-1}) \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}^{(pm)} \text{ (非均匀提升噪声向量)}$$

## 4 辨识算法

讨论非均匀采样系统的辨识方法时, 须假设连续过程  $S_c$

是完全能观测的. 只要周期  $T$  是非病态的 (Non-Pathological), 那么  $(C, A_c)$  能观测意味着  $(C, A_T)$  能观测<sup>[2]</sup>. 在辨识中, 我们并不强调系统的能控性, 因为辨识方法不直接利用这一条件, 当然辨识方法的性能也与系统的能控性有关. 因为提升模型 (2) 更具有一般性, 所以我们只讨论非均匀刷新、非均匀采样提升状态空间模型 (2) 的辨识问题. 这可分为状态已知和未知两种情况.

### 4.1 状态已知情形

假设提升输入向量  $u(k)$ , 提升输出向量  $y(k)$  和系统状态向量  $x(k)$  都是可测的, 那么 (2) 就是参数矩阵  $(A_T, B_T, C_T, D_T)$  的线性回归模型, 即

$$Z(k) = \begin{bmatrix} x(k+1) \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_T & B_T \\ C_T & D_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ v(k) \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中, 上标  $T$  表示矩阵转置. 于是, 最小二乘法<sup>[1,22]</sup> 可以用来估计式 (3) 未知参数矩阵, 算法如下:

$$\hat{x}(k) = \hat{x}(k-1) + L(k) [Z^T(k) - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \hat{v}(k) \end{bmatrix} \hat{x}(k-1)]$$

$$L(k) = P(k-1) \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \hat{v}(k) \end{bmatrix} / [1 + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \hat{v}(k) \end{bmatrix}^T P(k-1) \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \hat{v}(k) \end{bmatrix}]$$

$$P(k) = [I - L(k) \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \hat{v}(k) \end{bmatrix}^T] P(k-1)$$

式中,  $I$  为适当维数的单位阵,  $\hat{x}(k)$  为  $x(k)$  的估计,

$$\hat{v}^T(k) = \begin{bmatrix} A_T(k) & B_T(k) \\ C_T(k) & D_T(k) \end{bmatrix}$$

$y(k)$  的协方差阵  $\hat{v}$  可以通过下式估算

$$\hat{v} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [y(k) - C_T x(k) - D_T u(k)] [y(k) - C_T x(k) - D_T u(k)]^T$$

式中,  $N$  为数据长度,  $[A_T, B_T, C_T, D_T]$  是数据长度为  $N$  时, 系统矩阵  $[A_T, B_T, C_T, D_T]$  的估计.

我们注意到, 矩阵  $D_T$  是下三角阵, 即所谓的因果约束, 上述算法连矩阵  $D_T$  对角线以上的零元也进行了辨识, 实际上这是不必要的. 因此, 在辨识方法中需要处理这个因果约束, 我们将在后面论述, 因为处理这个因果约束的方法与下面的状态未知情形是类似的, 所以这里不再累述.

### 4.2 状态未知情形

状态是不可测的, 即状态是未知的, 上述算法不能采用, 因为向量  $\hat{v}(k)$  包含了系统状态. 因此, 必须采用递阶辨识方法来估计系统参数<sup>[18-20]</sup>. 递阶辨识的基本原理: 同时基于获得的状态估计和提升系统的输入输出数据 (非均匀采样), 递归估计出模型参数, 然后基于所获得的参数估计, 进一步计算系统的状态. 为了更清楚地表述状态空间模型递阶辨识方法, 现在假设  $S_c$  是一个多输入单输出系统, 对应的提升多率模型是一个多输入多输出系统. 具体做法如下:

令

$$y(k) := \begin{bmatrix} y(k) \\ Y(k) \end{bmatrix}, Y(k) = \begin{bmatrix} Y_1(k) \\ Y_2(k) \\ \dots \\ Y_{p-1}(k) \end{bmatrix}, Y_i(k) = y(kT + t_i)$$

$$\underline{y}(k) = \begin{bmatrix} v(k) \\ \mathbf{V}(k) \end{bmatrix}, \mathbf{V}(k) = \begin{bmatrix} V_1(k) \\ V_2(k) \\ \dots \\ V_{p-1}(k) \end{bmatrix}, V_i(k) = v(kT + t_i)$$

$$\underline{u}(k) = \begin{bmatrix} U_1(k) \\ U_2(k) \\ \dots \\ U_p(k) \end{bmatrix}, U_i(k) = u(kT + t_{i-1})$$

由系统能观测假设,那么存在一个非奇异变换  $\bar{x}(k) = \mathbf{M} \cdot \underline{x}(k)$ ,  $\mathbf{M} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  是可逆矩阵,使提升状态空间模型(2)化为下列能观测性规范型:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}(k+1) \\ y(k) \\ \mathbf{Y}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_x & \mathbf{B}_x \\ \mathbf{C}_y & \mathbf{D}_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(k) \\ \underline{u}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ v(k) \\ \mathbf{V}(k) \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中

$$\mathbf{A}_x = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}_T \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{R}^{n \times n}$

$$\mathbf{B}_x = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}_T = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n \times (pr)}, b_i \in \mathbf{R}^{1 \times (pr)}$$

$$\mathbf{C}_y = \mathbf{C} \mathbf{M} = [1, 0, 0, \dots, 0] \in \mathbf{R}^{1 \times n}, \mathbf{D}_y = [D, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}] \in \mathbf{R}^{1 \times (pr)}$$

$$\mathbf{C}_y = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_{p-1} \end{bmatrix}, \mathbf{M} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_{p-1} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{(p-1) \times n}$$

$$\mathbf{D}_y = \begin{bmatrix} D_1 & D & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ D_1 & D_2 & \ddots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \ddots & D & \mathbf{0} \\ D_1 & D_2 & \dots & D_{p-1} & D \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{(p-1) \times (pr)} \quad (5)$$

变换矩阵为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C} \mathbf{A}_T \\ \dots \\ \mathbf{C} \mathbf{A}_T^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \in \mathbf{R}^{n \times n}$$

于是式(4)可分解为:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}(k+1) &= \mathbf{A}_x \bar{x}(k) + \mathbf{B}_x \underline{u}(k) \\ y(k) &= \mathbf{C}_y \bar{x}(k) + \mathbf{D}_y \underline{u}(k) + v(k) = \mathbf{C}_y \bar{x}(k) + \mathbf{D} \underline{u}(k) + v(k) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\mathbf{Y}(k) = \mathbf{C}_y \bar{x}(k) + \mathbf{D}_y \underline{u}(k) + \mathbf{V}(k) \quad (7)$$

因此,首先基于非均匀多率采样输入输出数据,即提升的输入输出数据  $\{\underline{u}(k), \underline{y}(k)\}$  和  $\{u(k), y(k)\}$ ,辨识子系统(6)的参数矩阵  $[\mathbf{A}_x, \mathbf{B}_x, \mathbf{D}]$  和状态向量  $\bar{x}(k)$ ,然后利用获得的状态估计  $\hat{\bar{x}}(k)$  和提升输入输出数据,辨识子系统(7)的参数矩阵

$\{\mathbf{C}_y, \mathbf{D}_y\}$ .

第一步 参数矩阵  $[\mathbf{A}_x, \mathbf{B}_x, \mathbf{D}]$  和状态向量  $\bar{x}(k)$  的辨识

$$\bar{x}(k) = \begin{bmatrix} \bar{x}_1(k) \\ \bar{x}_2(k) \\ \dots \\ \bar{x}_n(k) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^n$$

定义参数向量 和信息向量  $\underline{u}(k)$  分别为

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n+(pr+1)n}, \mathbf{a} := [-a_n, -a_{n-1}, \dots, -a_1]^T \in \mathbf{R}^n,$$

$$\mathbf{b} := [D, b_1, b_2, \dots, b_n]^T \in \mathbf{R}^{pr(n+1)}$$

$$\underline{u}(k) = [x^T(k), u^T(k+n), \underline{u}^T(k+n-1), \underline{u}^T(k+n-2), \dots,$$

$$\underline{u}^T(k) J^T \mathbf{R}^{n+(pr+1)n}]^T$$

由式(6)可得

$$\begin{cases} \bar{x}_1(k+1) = \bar{x}_2(k) + b_1 \underline{u}(k) \\ \bar{x}_2(k+1) = \bar{x}_3(k) + b_2 \underline{u}(k) \\ \dots \\ \bar{x}_{n-1}(k+1) = \bar{x}_n(k) + b_{n-1} \underline{u}(k) \\ \bar{x}_n(k+1) = a \bar{x}(k) + b_n \underline{u}(k) \end{cases} \quad (8)$$

$$y(k) = \bar{x}_1(k) + \mathbf{D} \underline{u}(k) + v(k) \quad (9)$$

设  $z$  代表单位前移算子,  $z \underline{u}(k) = \underline{u}(k+1)$ , 方程(8)的第  $j$  式乘以  $z^{n-j}$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ), 把它们相加得到

$$\bar{x}_1(k+n) = a^T \bar{x}(k) + b_1 \underline{u}(k+n-1) + b_2 \underline{u}(k+n-2) + \dots + b_n \underline{u}(k) \quad (10)$$

式(9)乘以  $z^n$  可得

$$y(k+n) = \bar{x}_1(k+n) + v(k+n)$$

上式中,  $\bar{x}(k)$  包含未知状态向量  $\bar{x}(k)$  和未知参数向量, 我们必须采用递阶辨识方法来估计参数向量 和状态向量  $\bar{x}(k)$ , 算法如下:

$$\hat{\wedge}(k+1) = \hat{\wedge}(k) + \frac{\mathbf{P}(k-1) \hat{\wedge}(k)}{1 + \hat{\wedge}^T(k) \mathbf{P}(k-1) \hat{\wedge}(k)} [y(k+n) - \hat{\wedge}^T(k) \hat{\wedge}(k)] \quad (11)$$

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{P}(k-1) - \frac{\mathbf{P}(k-1) \hat{\wedge}(k) \hat{\wedge}^T(k) \mathbf{P}(k-1)}{1 + \hat{\wedge}^T(k) \mathbf{P}(k-1) \hat{\wedge}(k)} \quad (12)$$

$$\hat{\bar{x}}(k+1) = \mathbf{A}_x(k) \hat{\bar{x}}(k) + \mathbf{B}_x(k) \underline{u}(k) + \hat{\wedge}(k) \mathbf{C}_y^T [y(k) - \mathbf{C}_y \hat{\bar{x}}(k) - \mathbf{D} \underline{u}(k)] \quad (13)$$

$$\hat{\wedge}(k) = [x^T(k), u^T(k+n), \underline{u}^T(k+n-1), \underline{u}^T(k+n-2), \dots, \underline{u}^T(k) J^T]^T \quad (14)$$

$$\hat{\wedge}(k) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{a}}(k) \\ \hat{\mathbf{b}}(k) \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{a}}(k) = [-\hat{\alpha}_n(k), -\hat{\alpha}_{n-1}(k), \dots, -\hat{\alpha}_1(k)]^T,$$

$$\hat{\mathbf{b}}(k) = [D(k), b_1(k), b_2(k), \dots, b_n(k)]^T$$

$$\mathbf{A}_x(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ -\hat{\alpha}_n(k) & -\hat{\alpha}_{n-1}(k) & -\hat{\alpha}_{n-2}(k) & \dots & -\hat{\alpha}_1(k) \end{bmatrix},$$

$$B_x(k) = \begin{bmatrix} b_1(k) \\ b_2(k) \\ \dots \\ b_n(k) \end{bmatrix} \quad (15)$$

式中,  $\hat{\alpha}(k)$  是参数  $\alpha$  在时刻  $k$  的估计,  $\hat{x}(k)$  是状态  $x(k)$  的估计,  $[A_x(k), B_x(k)]$  是  $[A_x, B_x]$  的估计, 它是由估计出的参数  $[\hat{\alpha}_i(k), b_i(k)]$  构成的, 收敛因子满足  $\lambda_i(k) \geq 0, \lambda_i(k) = \lambda_i^2(k) < 1$ .

算法的初值可以取为  $P(0) = p_0 I, p_0$  是一个大正数, 如  $p_0 = 10^6, \hat{\alpha}(0) = \alpha_0$  是一个小实向量, 如  $\hat{\alpha}(0) = 10^{-6} \mathbf{1}_{n_0}$  ( $n_0 = \dim \alpha, \mathbf{1}_{n_0}$  是元素均为 1 的  $n_0$  维向量),  $\hat{x}(0)$  与  $\hat{\alpha}(0)$  类似.

**第 2 步**  $[C_Y, D_Y]$  的辨识

系统 (7) 中参数矩阵  $[C_Y, D_Y]$  是很容易辨识的, 因为利用我们已经估计出的状态和提升系统输入和输出数据, 就可以估计出参数矩阵  $[C_Y, D_Y]$  的各元.

考虑到因果约束, 即矩阵  $D_Y$  次上对角线以上元为零这一特殊结构, 因此  $D_Y$  的辨识可以分为 3 种情形: (1) 辨识  $D_Y$ , 包括其零元; (2) 辨识  $D_Y$  每行的所有非零元; (3) 辨识  $D_Y$  的第  $i$  行的非零元  $D_i, i = 1, 2, \dots, p - 1$ , 在第 1 步中已获得了  $D$  的估计.

**情形 1** 辨识  $D_Y$ , 包括其零元

令

$$c^T = [C_Y, D_Y] \mathbf{R}^{(p-1) \times (n+pr)}, \quad c(k) = \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ \hat{u}(k) \end{bmatrix} \mathbf{R}^{n+pr}$$

所以子系统 (7) 等价于

$$Y(k) = c^T c(k) + V(k)$$

从这个表达式, 参数矩阵  $c$  可以通过最小二乘法估计. 估计算法如下:

$$\hat{c}(k) = \left[ \sum_{j=1}^k \hat{c}(j) \hat{c}^T(j) \right]^{-1} \sum_{j=1}^k \hat{c}(j) Y^T(j) \quad (16)$$

$$\hat{c}(k) = \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ \hat{u}(k) \end{bmatrix} \mathbf{R}^{n+pr} \quad (17)$$

**情形 2** 辨识  $D_Y$  每行的所有非零元

把子系统 (7) 分解为  $(p - 1)$  子系统:

$$Y_i(k) = D_i^T U_i(k) + V_i(k), \quad i = 1, 2, \dots, p - 1$$

式中

$$d_i = [F_i, D_1, D_2, \dots, D_i, D]^T \mathbf{R}^{n+(i+1)r}$$

$$d_i(k) = \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ U_1(k) \\ U_2(k) \\ \dots \\ U_{i+1}(k) \end{bmatrix} \mathbf{R}^{n+(i+1)r}$$

那么  $d_i$  的估计可以从下列关系式计算

$$\hat{d}_i(k) = \left[ \sum_{j=1}^k \hat{d}_i(j) \hat{d}_i^T(j) \right]^{-1} \sum_{j=1}^k \hat{d}_i(j) Y_i(j) \quad (18)$$

$$\hat{d}_i(k) = \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ U_1(k) \\ U_2(k) \\ \dots \\ U_{i+1}(k) \end{bmatrix} \mathbf{R}^{n+(i+1)r}, \quad i = 1, 2, \dots, p - 1 \quad (19)$$

**情形 3** 辨识  $D_Y$  的第  $i$  行的非零元  $D_i (i = 1, 2, \dots, p - 1)$  把子系统 (7) 分解为  $(p - 1)$  子系统:

$$Y_i(k) - \sum_{l=1}^{i-1} D_l U_l(k) - D U_{i+1}(k) = F_i \hat{x}(k) + D_i U_i(k) + V_i(k)$$

或

$$Y_i(k) - \sum_{l=1}^{i-1} D_l U_l(k) - D U_{i+1}(k) = \begin{bmatrix} F_i \\ D_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ U_i(k) \end{bmatrix} + V_i(k), \quad i = 1, 2, \dots, p - 1$$

式中

$$e_i = [F_i, D_i] J^T \mathbf{R}^{n+r}, \quad e_i(k) = \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ U_i(k) \end{bmatrix} \mathbf{R}^{n+r}$$

那么  $e_i$  的估计可以从下列关系式计算

$$\hat{e}_i(k) = \left[ \sum_{j=1}^k \hat{e}_i(j) \hat{e}_i^T(j) \right]^{-1} \sum_{j=1}^k \hat{e}_i(j) \left[ Y_i(k) - \sum_{l=1}^{i-1} D_l(k) U_l(k) - D(k) u(k) \right] \quad (20)$$

$$\hat{e}_i(k) = \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ U_i(k) \end{bmatrix} \mathbf{R}^{n+r}, \quad i = 1, 2, \dots, p - 1 \quad (21)$$

式 (11) ~ (21) 构成了非均匀采样系统状态空间模型 (2) 的递阶辨识算法. 这个算法也可称为辅助模型辨识算法或 Bootstrap 算法<sup>[21]</sup>, 因为它是借助于状态空间模型作为辅助模型来估计状态, 从而估计系统参数的一种辨识方法.

**5 仿真试验**

例 考虑下列仿真对象

$$S_c(s) = \frac{1}{120s^2 + 10s + 1}$$

取  $p = 3, \tau_1 = 1s, \tau_2 = 2s, \tau_3 = 3s$ , 则  $t_1 = 1s, t_2 = 3s, t_3 = T = 1 + 2 + 3 = 6s$ . 对应的提升状态空间模型为

$$\begin{cases} x((k+1)T) = \begin{bmatrix} 0.50105 & -0.03742 \\ 4.49002 & 0.87522 \end{bmatrix} x(kT) \\ + \begin{bmatrix} 0.54102 & 1.32763 & 2.62137 \\ 4.22621 & 6.62568 & 4.12190 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(kT) \\ u(kT+1) \\ u(kT+3) \end{bmatrix} \\ y(kT) = [0, 0.00833] x(kT) + v(kT) \end{cases}$$

输入采用零均值单位方差随机信号序列,  $\{v(kT)\}$  采用零均值方差  $\sigma_v^2 = 0.10^2$  的白噪声序列. 取  $\hat{x}(k) = 1/(k + n_0)$ , 采用本文提出的递阶辨识方法辨识对应能观测性规范型状态空间模型

$$\begin{cases} x((k+1)T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} x(kT) \\ + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(kT) \\ u(kT+1) \\ u(kT+3) \end{bmatrix} \\ y(kT) = [1, 0] x(kT) + v(kT) \end{cases}$$

的参数, 真参数与不同迭代步数下的参数估计如表 1 所示, 其中  $\hat{\alpha} = \hat{\alpha} - \alpha / \sqrt{\hat{\alpha}^T \hat{\alpha}}$  ( $\hat{x}^2 = \hat{x}^T \hat{x}$ ) 为参数估计误差, 为真参数构成的向量,  $\hat{\alpha}$  为  $\alpha$  的估计. 不同迭代步数下的参

数估计误差曲线如图 5 所示. 估计的提升多率系统的状态空间模型为

$$\begin{cases} x((k+1)T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.62482 & 1.39511 \end{bmatrix} x(kT) + \begin{bmatrix} 0.03522 & 0.05521 & 0.03435 \\ 0.05107 & 0.09800 & 0.12815 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(kT) \\ u(kT+1) \\ u(kT+3) \end{bmatrix} \\ y(kT) = [1, 0] x(kT) \end{cases} \quad (22)$$

**表 1 真参数与参数估计** ( $\frac{\sigma}{\nu} = 0.10^2$ )

$k$	$-a_2$	$-a_1$	$b_{11}$	$b_{12}$	$b_{13}$	$b_{21}$	$b_{22}$	$b_{23}$	(%)
100	0.17819	0.58898	0.03191	0.06912	0.01392	0.01766	0.11957	0.07335	73.51195
200	-0.12884	0.93657	0.03227	0.05493	0.01505	0.03478	0.09880	0.09492	42.93566
300	-0.41296	1.26503	0.03713	0.06371	0.01361	0.04360	0.09964	0.10190	14.91779
500	-0.63045	1.40505	0.03753	0.05493	0.01545	0.05100	0.09746	0.10588	3.13680
1000	-0.65989	1.42694	0.03243	0.05511	0.02575	0.05101	0.10208	0.11380	4.99061
2000	-0.62623	1.39365	0.03298	0.05783	0.02975	0.05123	0.09978	0.12114	1.83767
3000	-0.62482	1.39511	0.03481	0.05699	0.03035	0.05069	0.10049	0.12301	1.79759
真值	-0.60653	1.37627	0.03522	0.05521	0.03435	0.05107	0.09800	0.12815	

对象  $S_c(s)$  与估计模型 (22) 的阶跃响应曲线如图 6 所示.

从表 1 和图 5 可以看出, 随迭代步数的增加, 参数估计误差总的趋势不断减小, 这说明提出的方法是有效的. 从图 6 可知, 估计模型的阶跃响应很接近对象  $S_c$  的阶跃响应, 说明估计模型可以捕获对象动态.

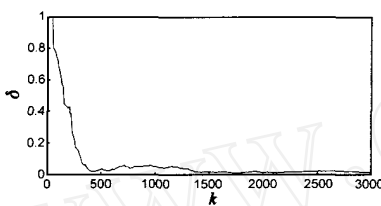


图 5 参数估计误差随  $k$  变化曲线 ( $\frac{\sigma}{\nu} = 0.10^2$ )

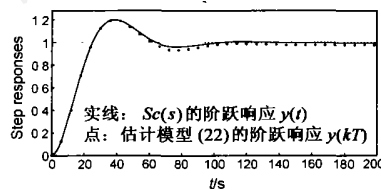


图 6 阶跃响应曲线比较 ( $\frac{\sigma}{\nu} = 0.10^2$ )

### 6 结语

针对非均匀采样数据多率系统, 本文考虑了状态可测和不可测两种情况, 基于非均匀采样多率输入输出数据, 提出了估计提升多率系统参数和状态的递阶辨识方法. 虽然文中的算法是针对输出误差非均匀采样多率系统给出的, 但所使用的方法, 可以推广用于辨识卡尔曼新息描述的非均匀采样多率系统, 以及输出和状态中含彩色噪声干扰的多率系统的辨识问题. 提出的多率系统递阶辨识算法阶性能分析仍需进行深入的研究

### 参考文献:

[ 1 ] 方崇智, 萧德云. 过程辨识[M]. 北京: 清华大学出版社, 1988.  
 [ 2 ] CHEN T, FRANCIS B. Optimal Sampled-data Control Systems[M]. London: Springer-Verlag, 1995.  
 [ 3 ] OHSHIMA M, HASHIMOTO I, et al. Multirate multivariable model predictive control and its application to a semi-commercial polymerization reactor[A]. Proceedings of the 1992 American Control Conference [C]. Chicago, USA: Evanston, IL, 1992, 2: 1576 - 1581.  
 [ 4 ] GUDI R D, SHAH S L, GRAYM R. Multirate state and parameter estimation in an antibiotic fermentation with delayed measurements[J]. Biotechnology and Bioengineering, 1994, 44(11): 1271 - 1278.  
 [ 5 ] LI D, SHAH S L, CHEN T, QI K Z. Application of dual-rate modeling to

CCR octane quality inferential control[J]. IEEE Trans Control Systems Technology, 2003, 11(1): 43 - 51.  
 [ 6 ] CHEN T. On stability robustness of a dual-rate control system[J]. IEEE Trans Automatic Control, 1994, 39(7): 1139 - 1152.  
 [ 7 ] CHEN T, QIU L.  $H_\infty$  design of general multirate sampled-data control systems[J]. Automatica, 1994, 30(7): 1139 - 1152.  
 [ 8 ] QIU L, CHEN T.  $H_2$  optimal design of multirate sampled-data systems[J]. IEEE Trans Automatic Control, 1994, 39(12): 2506 - 2511.  
 [ 9 ] QIU L, CHEN T. Multirate sampled-data systems: all  $H_\infty$  suboptimal controllers and the minimum entropy controller[J]. IEEE Trans Automatic Control, 1999, 44(3): 537 - 550.  
 [ 10 ] TANGIRALA A K, LI D, PATWARDHAN R S, SHAH S L, CHEN T. Ripple-free conditions for lifted multirate control systems[J]. Automatica, 2001, 37(10): 1637 - 1645.  
 [ 11 ] SHENG J, CHEN T, SHAH S L. Generalized predictive control for non-uniformly sampled systems[J]. Journal of Process Control, 2002, 12: 875 - 885.  
 [ 12 ] LI D, SHAH S L, CHEN T. Analysis of dual-rate inferential control systems[J]. Automatica, 2002, 38(6): 1053 - 1059.  
 [ 13 ] LU W P, FISHER G. Output estimation with multi-rate sampling[J]. International Journal of Control, 1988, 48(1): 149 - 160.  
 [ 14 ] Lu W P, FISHER G. Least-squares output estimation with multirate sampling[J]. International Journal of Control, 2001, 74(7): 680 - 689.  
 [ 15 ] LI D, SHAH S L, CHEN T. Identification of fast-rate models from multirate data[J]. International Journal of Control, 2001, 74(7): 680 - 689.  
 [ 16 ] DING F, CHEN T. Parameter identification and intersample output estimation of a Class of Dual-Rate Systems[A]. Proceedings of 43rd IEEE Conference on Decision and Control [C]. Hawaii, USA: IEEE, December 9-12, 2003. 5555 - 5560.  
 [ 17 ] DING F, CHEN T. Parameter estimation for dual-rate systems with finite measurement data[J]. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series B: Applications & Algorithms, 2004, 11(1): 101 - 121.  
 [ 18 ] 丁锋, 杨家本. 大系统的递阶辨识[J]. 自动化学报, 1999, 25(5): 647 - 654.  
 [ 19 ] DING F, YANG Jiaben, XU Yongmao. Convergence of hierarchical stochastic gradient identification for transfer function matrix model[J]. Control Theory and Application, 2001, 18(6): 949 - 953.  
 [ 20 ] 丁锋, 丁韬, 杨家本, 徐用懋. 衰减激励条件下递阶最小二乘辨

识的均方收敛性[J]. 控制与决策, 2002, 17(1): 6 - 10.

- [21] 丁锋, 陈通文, 萧德云. 一般双率系统状态空间模型及其辨识[J]. 自动化学报, 2004, 30 即将刊登.
- [22] 谢新民, 丁锋. 自适应控制系统[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.

#### 作者简介:

丁 锋 男, 1963 年 3 月出生于湖北省广水市, 1984 年湖北工业大学获得学士学位, 之后在湖北制药厂工作 4 年, 1990 年和 1994 年在清华大学自动化系分别获得硕士学位和博士学位(优秀博士论文), 1994 年任教于清华大学自动化系, 2002 年 6 月到加拿大艾伯塔(Alberta)大学作访问教授, 研究兴趣为模型辨识与多率系统及其应用, 与谢新民合作著《自适应控制系统》(清华大学出版社, 2002), 以第 1 作

者发表模型辨识学术论文 70 余篇, 获多次省部级科技进步奖.

陈通文 男, 1961 年 10 月出生于江西南, 1984 年清华大学获得学士学位, 1988 年和 1991 年在加拿大多伦多大学电气工程系获得硕士学位和博士学位, 1991 至 1997 年任教于加拿大卡尔加里(Calgary)大学电气与计算机工程系, 现任加拿大艾伯塔(Alberta)大学教授. 他与 B A Francis 合作著书 *Optimal Sampled-Data Control Systems* (Springer, 1995). 研究兴趣包括过程控制, 多率系统, 鲁棒控制, 数字信号处理及其在工业中的应用.

萧德云 男, 1945 年 8 月出生于福建仙游, 1970 年毕业于清华大学, 现任清华大学自动化系教授、博士生导师, 长期从事辨识建模、故障诊断、传感器信号融合、计算机应用和大型连续过程工业 CIMS 等领域的教学和科研.

www.cnki.net